985. 抽象M－空間ノ表現ニ就テ

大塚位相數學談話會

抽象M空間ヲ実際ニアル bicompact space ノ上ノ連続函数族トシテ表現スルコトハ角谷氏, M. Krein, 吉田氏ニヨッテ解決サレ, 又 normed ring トノ関係モ注意サレテヰル。此処デハ F. Riesz ノ積ヲ定義スル方法ヲ紹介シ, 兼ネテ normed ring ノ應用トシテ解決スルト云フコトヲ考ヘタイト思ヒマス。（位相數學III, 1. p.66, 本誌 889, 912 參照）

$\mathcal{L}$ ヲ実數ヲ係數トスル vector space デ, semi-order ニツイテ以下ノ條件ヲ滿足スルモノトスル。

(i) $x \geqq y$ ト $x-y \geqq 0$ トハ同等。

(ii) $x \geqq 0$, $\lambda \geqq 0$ ナラバ $\lambda x \geqq 0$（λ ハ實數）

(iii) $x \geqq 0$, $-x \geqq 0$ ナラバ, $x=0$

(iv) $x \geqq 0$, $y \geqq 0$ ナラバ, $x+y \geqq 0$

(v) $\mathcal{L}$ ハ semiorder ニ関シテ束ヲ作ル。

(vi) 任意ノ $x \in \mathcal{L}$ ハ $\mathcal{L}$ ノ特定ノ元 $e>0$ (unit element) ニ對シテ有界: 或ル実數 α ヲ取レバ
$-\alpha e \leqq x \leqq \alpha e$

(vii) $0 \leqq y \leqq \alpha e$ ガ任意ノ正數 α ニ対シテ成立スレバ, $y=0$

此処デ $x_+ = x \cup 0$, $x_- = (-x) \cup 0$, $|x| = x_+ + x_- = x \cup (-x)$,
$\|x\| = \inf\limits_{\lambda e \geqq |x|} \lambda$ トスレバ

(1) $\|x+y\| \leqq \|x\|+\|y\|$, $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$,

$\|x\| = 0 \longleftrightarrow x = 0$

ヲ満足スル。

(viii) $\mathfrak{L}$ ハコノ norm-topology ニヨッテ complete デアル。

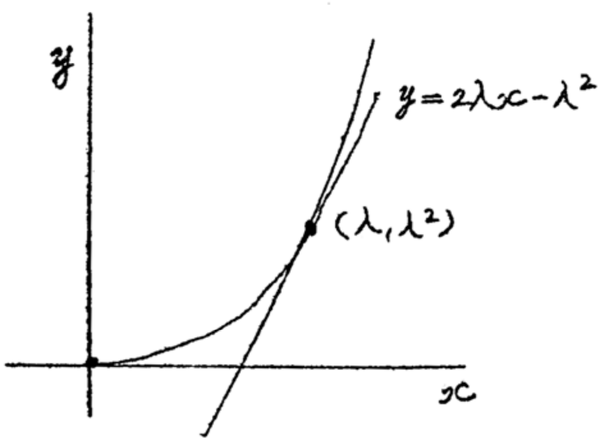
以上ノ條件 (i) — (viii) ヲ満足スル $\mathfrak{L}$ デ，任意ノ $\mathfrak{L}$ ノ x, y ニ對シテ $x\cdot y$ ヲ定義シテ ring トスルコトが出来ルコトヲ，F. Riesz, Sur la théorie ergodique des espaces abstraits, Acta Szeged, T. 10 (1941) ノ方法ニヨッテ示サウ。

$\mathfrak{L}$ デハ無限個ノ元ノ sup. ハ一般ニハ存在シナイが

(2) $$y_0 = \sup_{-\infty<\lambda<\infty} (2\lambda x - \lambda^2 e), \quad x \in \mathfrak{L}$$

(脚註) 以下ノ証明中，結合律 $(xy)z = x(yz)$ ノ証明が欠ケテヰルコトヲ吉田氏カラ注意シテイタダキマシタ。其レニ対シテ最後ニ訂正ヲ追加サセテイタダキマシタ。

ノ形ノ時ハ $y \in \mathfrak{L}$ が存在スルコトが証明サレル。



先ヅ $\|x\| = \alpha$ トスレバ，$\lambda > 2\alpha$ ニ對シテハ

$$2\lambda x - \lambda^2 e \leqq 2\lambda\cdot\alpha e - \lambda^2 e \leqq 0$$

同様ニ $\lambda < -2\alpha$ デモ

$$2\lambda x - \lambda^2 e \leqq 0$$

故ニ $\sup\limits_{-2\alpha\leqq\lambda\leqq2\alpha}(2\lambda x-\lambda^2 e)$ ヲ考ヘル。

$$(2')\qquad y_n=\sup_{r=0,\pm1,\cdots\pm2^n}\left\{2\frac{r}{2^n}\cdot2\alpha\cdot x-\left(\frac{r\cdot2\alpha}{2^n}\right)^2e\right\}$$

トオケバ，明カニ $\{y_n\}$ ハ単調ニ増加スル。先ヅ $\{y_n\}$ ハ norm-topology デ fundamental sequence ヲ作ルコトヲ証明シヨウ。

$|\lambda|\leqq2\alpha$ ヲ一ツトリ，$2\alpha\dfrac{r-1}{2^n}<\lambda\leqq\dfrac{r}{2^n}\cdot2\alpha$ ト r ヲ取ル。

$$y_n-(2\lambda x-\lambda^2e)$$

$$=\sup_m\left\{\left(2\cdot\frac{m}{2^n}\cdot2\alpha\cdot x-\left(\frac{2m\alpha}{2^n}\right)^2e\right)-(2\lambda x-\lambda^2e)\right\}$$

$$\geqq\left(2\frac{2r\alpha}{2^n}x-\left(\frac{2r\alpha}{2^n}\right)^2e\right)-(2\lambda x-\lambda^2e)$$

$$\geqq-\frac{4\alpha}{2^n}\cdot|x|-\frac{2\alpha}{2^n}\cdot4\alpha\cdot e$$

$$\geqq\frac{12\alpha^2}{2^n}e$$

或ハ

$$(2\lambda x-\lambda^2e)-y_n\leqq\frac{12\alpha^2}{2^n}e$$

故ニ

$$y_m-y_n=\sup_r\left\{\left(2\frac{2r\alpha}{2^m}x-\left(\frac{2r\alpha}{2^m}\right)^2e\right)-y_n\right\}\leqq\frac{12\alpha^2}{2^n}e$$

$\therefore$ m ト n トヲ入レカヘレバ

$$\|y_m - y_n\| \leqq \left(\frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^n}\right) 12\alpha^2 \cdot e$$

トナル。即チ $\{y_n\}$ ハ基本列トナル。

(viii) カラ其ノ $limit$ ヲ y_0 トスレバ, y_0 ガ (2) ヲ満足スルコトハ上ト同様デアル。

(3) $y_0 = x^2$

ニヨッテ x^2 ノ定義トスル。

(4) $x^2 \geqq 0$

(証) (2) ノ式デ $\lambda = 0$ ノ場合ヲ考ヘレバヨイ。

(5) $x \geqq y \geqq 0$ ナラバ, $x^2 \geqq y^2$

(証) 先ヅ $x \geqq 0$ ナラバ, $x^2 = \sup\limits_{\lambda \geqq 0} (2\lambda x - \lambda^2 e)$ デアルコトニ注意スレバ

$$x^2 = \sup_{\lambda \geqq 0} (2\lambda x - \lambda^2 e) \geqq \sup_{\lambda \geqq 0} (2\lambda y - \lambda^2 e) = y^2$$

(6) $(\alpha x)^2 = \alpha^2 x^2 \qquad (\alpha \neq 0)$

(証) $2\lambda(\alpha x) - \lambda^2 = \alpha^2(2\mu x - \mu^2)$, $\left(\mu = \frac{\lambda}{\alpha}\right)$ ヨリ

(7) $x^2 = |x|^2$

(証) $x^2 = \sup (2\lambda x - \lambda^2 e) = \sup\limits_{\lambda \geqq 0} \{\sup (2\lambda x - \lambda^2 e, -2\lambda x - \lambda^2 e)\}$

$$= \sup_{\lambda \geqq 0} (2\lambda |x| - \lambda^2) = |x|^2$$

(8) $(\alpha x + \beta y)^2 + (\beta x - \alpha y)^2 = (\alpha^2 + \beta^2)(x^2 + y^2)$

(証) (6) 式カラ $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ ノ場合ヲイヘバヨイ。其ノトキハ

$$\{2\lambda(\alpha x+\beta y)-\lambda^2 e\}+\{2\mu(\beta y-\alpha x)-\mu^2 e\}$$
$$=(2\lambda' x-\lambda'^2 e)+(2\mu' y-\mu'^2 e)$$ ヨリ

此処ニ $\lambda'=\alpha\lambda+\beta\mu$, $\mu'=\beta\lambda-\alpha\mu$,

即チ $\lambda=\alpha\lambda'+\beta\mu'$, $\mu=\beta\lambda'-\alpha\mu'$ トスル。

特ニ

(8') $(x+y)^2+(x-y)^2=2x^2+2y^2$

次ニ x, y ノ定義トシテ

(9) $xy=(x+y)^2-x^2-y^2$

ト置ク。明カニ $xy=yx$ デアル。又(8')式ヲ用ヒレバ

(9') $xy=x^2+y^2-(x-y)^2$

トシテモヨイ。

(10) $x\cdot(-y)=-(xy)$

(証) (9')ト(9)ヲ用ヒテ

$$x(-y)=x^2+y^2-(x+y)^2=-(xy)$$

(11) $\alpha>0$ ナラバ $x(\alpha y)=\alpha(xy)$

(証) (8)ニテ $\alpha=1$, $y=\beta y$ トスレバ

$$(x+\beta^2 y)^2+\beta^2(x-y)^2=(1+\beta^2)(x^2+\beta^2 y^2)$$

(9')カラ $(x-y)^2$ ヲ展開スレバ

$$(x+\beta^2 y)^2=x^2+2\beta^2 xy+\beta^4 y^2$$

トナル。故ニ(9)ノ定義ヨリ

$$x(\beta^2 x)=\beta^2 xy$$

トナル。$\alpha=\beta^2$ トオケ。

(12) $(x+y)z=xz+yz$

(証) (8')ニテ x ヲ $x+\frac{1}{2}z$, $y+\frac{1}{2}z$ トスレバ

$$((x+y)+z)^2+(x-y)^2$$
$$=2(x+\frac{1}{2}z)^2+2(y+\frac{1}{2}z)^2$$

(10)(11) ヲ用ヒテ展開スレバ (12) ヲ得ル。

(13) $x\cdot x=x^2$

(証) $(x+x)^2=4x^2=x^2+2x^2+x^2$ ヨリ

(14) $x\cdot 0=0$ 特ニ $0^2=0$

(証) $(x+0)^2=x^2+0$ ヨリ。—

(15) $x\cdot e=x$ 特ニ $e\cdot e=e^2=e$

(証) $2\lambda(x+e)-\lambda^2 e=(2\mu x^2-\mu^2 e)+2x+e\ (\mu=\lambda-1)$

カラ，両辺ノ $\sup_\lambda$ ヲトレバ，$(x+e)^2=x^2+2x+e$，

即チ (9) ノ定義ヨリ (15) ヲ得ル。

以上ニヨッテ，$\mathcal{L}$ ヲ実数ヲ *operator* トスル *ring* ト考ヘルコトガ出来タ。次ニ

(16) $x\geqq 0,\ y\geqq 0$ ナラバ $xy\geqq 0$

(証) $x-y\leqq x+y,\ -x+y\leqq x+y$ カラ $|x-y|\leqq x+y$ トナル。故ニ (5)，(7) カラ

$$(x-y)^2=|x-y|^2\leqq(x+y)^2$$

(9) (9′) カラ展開スレバ $xy\geqq 0$ ヲ得ル.

(17) $\|xy\|\leqq\|x\|\cdot\|y\|$

(証) $xy=(\|x\|\cdot e)(\|y\|e)-\frac{1}{2}(\|x\|e-x)(\|y\|e+y)$
$$-\frac{1}{2}(\|x\|e+x)(\|y\|e-y)$$

ヨリ，(16) ヲ用ヒレバヨイ。

以上デ $\mathcal{L}$ ハ *real normed ring* トナッタ。

(18) $\|x^2\|=\|x\|^2$

(證) (17)ヨリ $\|x^2\| \leqq \|x\|^2$. 今 $\|x^2\| \leqq \|x\|^2 - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ トスレバ

$$(\|x\|^2 - \varepsilon)e \geqq \|x^2\| e \geqq x^2 = \sup(2\lambda x - \lambda^2 e)$$
$$\geqq 2\|x\|\,|x| - \|x\|^2 e,$$

即チ $\left(\|x\| - \dfrac{\varepsilon}{2\|x\|}\right) e \geqq |x|$ トナリ, $\|x\|$ ノ定義ニ反スル.

(19) $x \geqq 0$ ナラバ, $x + e$ ハ $\mathfrak{L}$ 中ニ逆元ヲモツ, 特ニ $e + x^2$ ハ逆元ガアル。

(證) 以下 I. Gelfand, Normierte Ringe, Rec. Math. T. 6 (1941) ヲ引用スル。

先ヅ $e \leqq e + x \leqq (1 + \|x\|) e$

$$\therefore \quad 0 < \frac{e}{1+\|x\|} \leqq \frac{e+x}{1+\|x\|} \leqq e$$

故ニ $\left\| e - \dfrac{e+x}{1+\|x\|} \right\| < 1$ デアルカラ Gelfand, Hilfssatz 1 カラ $\dfrac{e+x}{1+\|x\|}$, 從ツテ $e + x$ ハ逆元ヲモツ。——

(18), (19) ヨリ Gelfand, Satz 15, Satz 16 ノ Folg 3 ヲ用ヒテ

(20) $\mathfrak{L}$ ハ Maximal ideal M ノ全体ノ作ル bicompact space $\mathfrak{M}$ ノ上ノ実連續函数全体トシテ ring-isomorphic ニ表現サレル。且ツ

$$\|x\| = \max_{M \in \mathfrak{M}} |x(M)|$$

(21) $x \geqq y$ ナラバ, スベテノ $M \in \mathfrak{M}$ ニ対シテ

$$x(M) \geqq y(M)$$

(証) $x \geqq 0$ ノトキニ $x(M) \geqq 0$ ヲ言ヘバ十分デアル。

$$x = \lambda e + m,\quad m \in M,\quad \lambda < 0$$

トスレバ

$$\frac{m}{(-\lambda)} = e + \frac{x}{(-\lambda)},\quad \frac{x}{(-\lambda)} \geqq 0$$

トナル。即チ (19) ヨリ $\frac{m}{(-\lambda)}$, 従ッテ m ハ逆元ヲ持タネバナラヌ。コレハ矛盾デアルカラ $\lambda \geqq 0$

(22) スベテノ $M \in \mathfrak{M}$ デ $x(M) \geqq y(M)$ ナラバ,

$$x \geqq y$$

(証) 此ノトキモ $x(M) \geqq 0$ $(M \in \mathfrak{M})$ カラ $x \geqq 0$ ヲ言ヘバヨイ。

$$(x + \varepsilon e)(M) > 0 \quad (M \in \mathfrak{M}) \quad (\varepsilon > 0)$$

カラ, Gelfand, Satz 20 ヨリ $\sqrt{x + \varepsilon e} = y \in \mathfrak{L}$. 即

$$x = y^2 - \varepsilon e \geqq -\varepsilon e$$

コヽデ ε ハ任意デアルカラ $\|x_-\| = 0$, 故ニ $x \geqq 0$ トナル。

以上ヲマトメテ

> <u>定理</u>　『$\mathfrak{L}$ ヲ上ノ方法デ normed ring トシタトキニ, $\mathfrak{L}$ ノ Maximal ideal M 全体ノ作ル bicompact space $\mathfrak{M}$ ノ上ノ実連續函数全体トシテ ring isomorphic ニ表現サレ
>
> $$\|x\| = \underset{M \in \mathfrak{M}}{\mathrm{Max}} |x(M)|$$

ヲ満足シ，且ツ $x \geqq y$ ト $x(M) \geqq y(M)$ ($M \in \mathfrak{M}$) トハ同値デナル。

又，$f(x) = x(M)$ ナル functional ハ

$$
(23) \begin{cases} f(x+y) = f(x) + f(y) \\ f(\lambda x) = \lambda f(x) \\ f(x \vee y) = f(x) \vee f(y), \quad f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y) \\ f(e) = 1 \qquad (\text{従ッテ } |f(x)| \leqq \|x\|) \end{cases}
$$

$$
(24) \quad f(xy) = f(x) \cdot f(y)
$$

ヲ満足スル。』

注意1　特ニ $\mathfrak{L}$ ガ初メカラ，アル bicompact space $\mathfrak{R}$ ノ上ノ連續函數全体デアル場合ニハ，$\mathfrak{R}$ ノ各点ト $\mathfrak{L}$ ヲ normed ring ト考ヘタトキノ maximal ideal トー対一ニ対応スルカラ $\mathfrak{R}$ ハ上ノ $\mathfrak{M}$ トシテ再現サレル。

注意2. 角谷氏ノ結果ト同ジモノデアルコトヲ云フタメニハ，(23) カラ (24) ヲ得ルコトヲ云ヘバ，$f(x) = 0$ ナル x ノ全体ハ $\mathfrak{L}$ ノ maximal ideal トナルカラ，ソレデ十分デアル。

(25)　$f(x)$ ナル functional ガ (23) ヲ満足スルナラバ，$f(x) = 0$ カラ $f(xy) = 0$ ($y \in \mathfrak{L}$) トナル。

(証)　y_n ヲ (2′) デ定メレバ，$\|y_n - x^2\| \longrightarrow 0$ カラ

$$
f(x^2) = \lim f(y_n)
$$

シカルニ

$$f(y_n)=\sup_i\{2\lambda_i f(x)-\lambda_i^2\}=\sup(-\lambda_i^2)=0$$

故ニ　$f(x)=0$ ナラバ，$f(x^2)=0$

同様ニ　$f(x+y)=f(y)$ デアルカラ，

$$2f(xy)=f((x+y)^2-y^2-x^2)$$
$$=f((x+y)^2-f(y^2)$$

ニ於テ

$$f((x+y)^2)=\lim_n \sup_i\{2\lambda_i f(x+y)-\lambda_i^2\}$$
$$=\lim\sup\{2\lambda_i f(y)-\lambda_i^2\}=f(y^2),$$

即チ　$f(xy)=0$ トナル。

サテ (24)ハ之レカラ直チニモトメラレル。

注意3.　若シ $\mathfrak{L}$ ガ初メカラ ring デアッテ，(i)—(viii) ノ条件ノ他ニ

(ix)　$x\geqq 0$，$y\geqq 0$ ナラバ，$xy\geqq 0$

(x)　$x^2\geqq 0$

ヲ満足スルナラバ，上ノ定理ハ其ノマヽ成立スル。

何トナレバ，(2)，(3)，(18)ノ他ハ一切其ノマヽ成立スル。

今　$y_0\leqq(x-\lambda e)^2$　（スベテノ $-\infty<\lambda<\infty$ ニ對シテ）デアレバ，(21)カラ $y_0(M)\leqq 0$ トナリ，(22)カラ $y_0\leqq 0$ デナケレバナラヌ。

故ニ　$0=\inf_\lambda(x-\lambda e)^2$

トナル。之レヲ展開スレバ (2)，(3)，従ッテ (18)ガ成立スルコトニナル。

追加訂正

結合律 $(x\cdot y)z=x(yz)$ ノ証明ヲ上ト同ジヤウナ方法デ証明スルコトガ，ドウモ出来ナイノデ，此処デハ $\mathcal{L}$ ヲ complete vector lattice $\overline{\mathcal{L}}$ ニ拡大スルコトニヨツテ，更ニ別ノ一ツノ証明ヲ與ヘルコトニシマス。

(i) — (viii) ヲ満足スル $\mathcal{L}$ デハ (vi) (vii) カラアルキメデスノ公理ヲ満足スル。故ニ Birkhoff 及ビ中野氏ノ cut ノ方法デ $\mathcal{L}$ ヲ complete vector lattice $\overline{\mathcal{L}}$ ニ拡大スルコトガ出来ル。

$\overline{\mathcal{L}}\ni u$ ニ対シテ $x\longrightarrow P_u x$ ヲ Projection トスル。即チ $x\geqq 0$ ニ対シテ $P_u x=\sup_{n\geqq 1}(x\frown nu)$，一般 $P_u x=P_u x_+ - P_u x_-$ ト置ク。其ノ時ニ

$$(26)\quad P_u(x+y)=P_u x+P_u y,\ P_u(\lambda x)=\lambda P_u x,$$
$$P_u(x \smile_\frown y)=(P_u x)\smile_\frown(P_u y).$$

又 $u_1,\cdots\cdots,u_n$ ヲ e ノ分割 (partition) トスル。即

$$(27)\quad \overline{\mathcal{L}}\ni u_i\geqq 0,\ u_i\frown(e-u_i)=0,$$
$$u_i\frown u_j=0\ (i\neq j),\ u_1+\cdots\cdots+u_n=e.$$

e ノ分割ニ對シテハ

$$(28)\quad x=P_{u_1}x+\cdots\cdots+P_{u_n}x,\ |P_{u_i}x|\frown|P_{u_j}x|=0,\quad (i\neq j)$$

サテ $x\in\mathcal{L}$ ニ対シテ $x_u=P_u' x\in\overline{\mathcal{L}}$，全体 $\mathcal{L}_u$ ヲ考ヘルナラバ，(26) カラ $\mathcal{L}_u$ ハ $\mathcal{L}$ ト homomorphic ナ vector lattice with (i) — (viii) ヲ作ル。特ニ $u_1,\cdots\cdots,u_n$ ヲ e ノ分割トスレバ

(29) $\mathcal{L} \ni x \longrightarrow (x_{u_1}, \cdots\cdots, x_{u_n}), \; x_{u_i} \in \mathcal{L}_{u_i}$

ナル對應ヲ考ヘルナラバ

$$(30)\begin{cases} x_{u_i} = y_{u_i} \quad (i=1,\cdots\cdots,n) \text{ナラバ } x=y \\ x+y \longleftrightarrow (x_{u_1}+y_{u_1}, \cdots\cdots, x_{u_n}+y_{u_n}) \\ \alpha x \longleftrightarrow (\alpha x_{u_1}, \cdots\cdots, \alpha x_{u_n}) \\ x \overset{\smile}{\frown} y \longleftrightarrow (x_{u_1} \overset{\smile}{\frown} y_{u_1}, \cdots\cdots, x_{u_n} \overset{\smile}{\frown} y_{u_n}) \end{cases}$$

ヲ満足スル．特ニ $\mathcal{L}_{u_i}$ 中デ(1)ニヨッテ norm $\| \quad \|_i$ ヲ定義スレバ，$x \in \mathcal{L}$ ニ対シテ

(31) $\|x\| = \underset{1 \leq i \leq n}{Max} (\|x\|_i)$

サテ結合律ヲ $x, y, z \geqq 0$ ノ場合ニサヘ証明スレバ，一般ノ場合ニハ $x = x_+ - x_-$ ナル分解ト分配律（12）トカラ証明サレル。

今 $\overline{\mathcal{L}}$ 中ニ於ケル y ノスペクトル分解

$$y = \int_0^{\|y\|} \lambda d e_\lambda, \quad e_\lambda = P_{(\lambda e - y)_+} e$$

ヲ考ヘ，$0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \cdots\cdots < \lambda_n = \|y\|$, $\lambda_i - \lambda_{i-1} < \varepsilon$ ニ對シテ

(32) $u_i = e_{\lambda_i} - e_{\lambda_{i-1}} \qquad (i=1, \cdots\cdots, n)$

ヲ考ヘレバ，$u_1, \cdots\cdots, u_n$ ハ e ノ分割ヲ作リ

(33) $0 \leqq \lambda_{i-1} e_{u_i} \leqq y_{u_i} \leqq \lambda_i e_{u_i}$, in $\mathcal{L}_{u_i}$

トナル。ヨッテ (15), (16) ヲ $\mathcal{L}_{u_i}$ 中デ考ヘルナラバ

$$\lambda_{i-1} \|x\| e_{u_i} \leqq x_{u_i} y_{u_i} \leqq \lambda_i \|x\| e_{u_i}$$

$$\lambda_{i-1} \|x\| \cdot \|z\| e_{u_i} \leqq (x_{u_i} y_{u_i}) z_{u_i} \leqq \lambda_i \|x\| \cdot \|z\| e_{u_i}$$

トナリ，同様ニ

$$\lambda_{i-1}\|x\|\cdot\|z\|e_{u_i}\leqq x_{u_i}(y_{u_i}\cdot z_{u_i})\leqq\lambda_i\|x\|\cdot\|z\|e_{u_i}$$

トナルカラ

$$(34)\quad \|(x_{u_i}y_{u_i})z_{u_i}-x_{u_i}(y_{u_i}z_{u_i})\|\leqq\varepsilon\|x\|\|z\|e_{u_i}$$

トナル。

一方(30),(31)カラ

$$(35)\quad \begin{cases} x^2 \longleftrightarrow (x^2_{u_1},\cdots\cdots,x^2_{u_n}) \\ xy \longleftrightarrow (x_{u_1}y_{u_1},\cdots\cdots,x_{u_n}\cdot y_{u_n}) \end{cases}$$

ガ成立スルカラ(31),(34),(35)ヲ合セ考ヘレバ

$$\|(xy)z-x(yz)\|\leqq\varepsilon\|x\|\|z\|$$

トナル。εハ任意ニ小サク取レルカラ，結局$(xy)z=x(yz)$トナル。　(証了)

注意4. 若シモ$\mathfrak{L}$ヲ$\overline{\mathfrak{L}}$ニ拡大シテ，Projectionノイロイロナ性質ヲ用ヒルコトガ避ケラレナイナラバ，(4)以下ノ証明ヲスベテ今ノ結合律ト同様ニ証明スル方ガヨイカモ知レナイ。其レ等ハ全ク結合律同様ニ証明出来ルノデアルカラ。

注意5. 良ク知ラレテヰルヤウニcompletenessノ條件(viii)ハessentialナモノデハナイ。$\mathfrak{L}$ガnormニ関シテcompleteデナイ場合ニハ，$\mathfrak{L}$ヲcompleteナ$\mathfrak{L}_0$ニ拡大スレバヨイ。

即チ$\mathfrak{L}$ノ元ノ作ル基本列$\{x_n\}$, $\|x_m-x_n\|\to 0$ $(m,n\to\infty)$ノ全体ヲequivナ関係ヘデclassニ分ケテ得ラレルvector space $\mathfrak{L}_0$ヲ考ヘテ，其処デ

$\{x_n\} \geqq 0$ トハ $\{x_n\} \sim \{y_n\}$, $y_n \geqq 0$ $(n=1,2,\cdots\cdots)$ ナル y_n ノ選ベルコトヽスレバ

○ $\{x_n\} \geqq 0$, $\{y_n\} \geqq 0$, $\lambda \geqq 0$ ナラバ

$$\{\lambda x_n\} \geqq 0, \quad \{x_n + y_n\} \geqq 0$$

○ $\{x_n\} \geqq 0$, $\{-x_n\} \sim \{y_n\} \geqq 0$ ナラバ

$$x_n, y_n \geqq 0, \quad \|x_n + y_n\| \to 0 \ (n \to \infty)$$

カラ $\|x_n\| \leqq \|x_n + y_n\|$ ニヨッテ $\|x_n\| \to 0$, 即チ

$$\{x_n\} = 0$$

○ $\{x_n\} \cup \{y_n\} = \{x_n \cup y_n\}$. 何故ナラバ

$$|x_n \cup y_n - x_m \cup y_m| < |x_n - x_m| + |y_n - y_m|$$

ヲ用ヒレバヨイ。

○ $|\{x_n\}| \leqq \lambda e$ ナル λ ノ *fin* ト $\lim\limits_n \|x_n\|$ トハ一致スル。等々。

故ニ $\mathcal{L}_0$ ハ (i)—(viii) ヲ満足シテ $\mathcal{L}$ ヲ everywhere dense ニ isomorphic ニ embed スル。

特ニ $\mathcal{L}$ デ (23) ヲ満足スル functional ハ矢張リ (23) ヲ満足スルヤウニ $\mathcal{L}_0$ ニマデ拡張スルコトガ出来ルカラ，結局 (viii) ヲ満足シナイ $\mathcal{L}$ デハ，定理ニ於テ，実連続函数全体トイフ代リニ，ソノ中デ norm ニ関シテ everywhere dense ナ連續函数族トシテ表ハサレルトイフ結論ニナル。コレハ吉田氏ノ簡明ナ方法デ得ラレタ結果ニ廻リ道ヲシテ到達シタコトニナル。

<u>注意5.</u> 注意3デ條件 (X) ハ実ハ (i)—(iX) カラ証明サレル。例ヘバ cut ヲ用ヒテ complete ring ニ $\mathcal{L}$ ヲ

拡大シテ、スペクトル分解ヲ用ヒレバワカル。但シ直接ニ(X)ヲ(i)—(iX)カラ簡単ニ導ケルカ否カハ良クワカラナイ。　(16, 11, 22)

(河田, 森田, 宮澤)